第 40 卷　第 3 期
2022 年 9 月
天　文　学　进　展
PROGRESS IN ASTRONOMY
Vol. 40,　No. 3
Sept., 2022

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2022.03.04

力梯度辛算法在外限制性系外行星三体问题中的应用

王雅茹[1,2]，刘福窑[1]，王　颖[1,2]，孙　威[1,2]，郑晶晶[1,2]，肖倩倩[1,2]

(1. 上海工程技术大学 数理与统计学院，上海 201620；　2. 上海工程技术大学 计算物理与应用研究中心，上海 201620)

摘要： 旋转质心坐标系下的椭圆型外限制性系外行星三体问题的哈密顿方程含有坐标和动量的交叉项，并且显含时间变量，系统不再守恒，显式力梯度辛算法无法直接应用。对此，通过扩大相空间将非保守哈密顿系统变换为自治的哈密顿系统，并重新构造力梯度辛算法，实现力梯度辛算法在椭圆型外限制性三体问题中的应用。结果表明，构造的力梯度辛算法的精度优于非力梯度辛算法，并且优化后的力梯度辛算法的精度优于未优化的力梯度辛算法。此外，采用优化的力梯度算法，以及快速 Lyapunov 指数对椭圆型外限制性系外行星三体系统进行相空间扫描，获得了各参数对行星轨道动力学稳定性的影响。

关　键　词： 力梯度辛算法；椭圆型外限制性三体问题；系外行星；混沌；动力学稳定性

中图分类号： P132　　　**文献标识码：** A

1　引　言

三体是指可视为质点的天体靠相互之间万有引力作用组成的力学关系[1]，由于一般三体问题是不可积的 18 维哈密顿系统[2]，并且相空间比较复杂，我们常忽略第三体的质量，将其视为仅在两主天体的引力作用下运动的试验粒子，且不考虑它对两主天体的影响，这种简化的三体模型称为限制性三体问题[3]。由于 $m \ll m_1, m_2$，可以不考虑行星 m 对另外两主天体 m_1 和 m_2 的引力作用，两主天体 m_1 和 m_2 在相互引力作用下做开普勒运动，行星 m 在两个主天体的引力下运动。若两主天体 m_1 和 m_2 做圆运动，则为圆型限制性三体问题；若做椭圆运动，则为椭圆型限制性三体问题。如果行星 m 的运行轨道在两主天体轨道内部，则为内限制性三体问题；若在轨道外部，则为外限制性三体问题[1]。

收稿日期： 2021-11-05；　**修回日期：** 2022-02-21

资助项目： 国家自然科学基金 (U2031145, 11803020, 41807437)；上海工程技术大学研究生科研创新项目 (20KY2107)

通讯作者： 王雅茹，wyr1996029@163.com

三体系统中存在混沌运动，混沌运动是天体动力学中一个重要研究课题，混沌意味着蝴蝶效应，即非线性动力学系统对初始条件的微小变化具有指数敏感性[4]。了解天体的混沌运动有助于分析行星的轨道演化和轨道稳定性，而鉴定混沌和有序需要可靠的数值方法。20 世纪 80 年代初，为克服传统算法不足，Feng[5] 与 Ruth[6] 各自独立提出能够保持哈密顿相流辛结构的数值积分算法，称为辛算法。这类算法具有可使系统能量误差无长期变化的优点，通常称为保持能量，但不是严格意义的能量保持方法[7–9]。它们特别适合用来研究太阳系行星系统、系外行星系统和致密天体系统的长期动力学演化问题[10–13]。辛算法可以分为隐式辛算法[14] 和显式辛算法[6]。隐式辛算法主要应用于不可分的哈密顿系统，以隐式中点法为基础构建高阶隐式辛算法，适用于任何形式的哈密顿函数，但在积分过程中由于迭代计算导致计算效率低；多数情况下显式辛算法通常要求哈密顿系统至少分解为两个可积部分。由于显式辛算法的计算效率比隐式辛算法的高，当哈密顿系统能可积分解时，显式辛算法应当优先考虑选择[15–20]。有时需将变量不可分离哈密顿系统分解为一个显式求解部分和另一个隐式求解部分，然后组合成显隐混合辛算法[21–23]，与整个系统完全用隐式辛算法求解来比也有计算效率优势。扩大相空间，构造显式类辛算法[24–26]，具有辛方法类似性质和计算效率快的优点。关于辛算法详细介绍可参阅廖新浩和刘林[27] 及孙浪等人[28] 的综述文章。

1983 年，Ruth[6] 针对具有动能 T 和势能 V 两个可积部分的哈密顿系统，提出了显式二阶和三阶辛算法。随后 Forest 和 Ruth[29] 与 Candy 和 Rozmus[30] 的四阶辛算法相继被提出，1990 年，Yoshida[31] 在 Ruth 的理论基础上用三个二阶辛算法组合得到四阶显式的 Yoshida 辛算法。1992 年，Mclachlan 和 Atela[32] 提出了算法的优化概念，将主要截断误差项的影响降到最小，得到了优化的二阶显式辛算法和三阶 Forest-Ruth 辛算法。2002 年，Omelyan 等人[33] 构造了优化的四阶辛算法。一个值得注意的问题是 Ruth 在给出三阶显式辛算法的同时还提出了三阶力梯度算法，就是提取三阶截断误差中与力梯度有关项加入势能 V 来构建算法，亦即用更改的势能来构造辛算法。后来 Chin 和 Chen[34–36] 把力梯度辛算法发展到了四阶。Omelyan 等人[37, 38] 将最优化思想引入到力梯度辛算法中，按照对称组合的形式构造了三阶和四阶最优化力梯度辛算法，并将这两种方法运用到天体力学等领域中。国内学者也对力梯度辛算法的发展和应用拓广做了一些工作[39–43]。实际上，力梯度辛算法的应用不限于动能 T 为动量二次标准形式。Xu 和 Wu[39] 发现 T 为开普勒问题时力梯度辛方法仍可应用。陈云龙和伍歆[44] 将力梯度辛方法推广应用于动能是动量的二次函数形式的圆型限制三体问题。近来，Zhang 等人[45] 推广力梯度辛方法于 T 可含有坐标且为动量二次的形式。

研究发现，与同阶的非力梯度辛算法相比，力梯度辛算法在开普勒二体问题、摄动的开普勒二体问题、分子动力学多粒子问题、太阳系 N 体问题、量子力学薛定谔方程以及圆型限制性三体问题模拟中都比同阶非力梯度辛算法好，并且优化后的总比未优化的算法精度好[34–41, 43, 44, 46, 47]。旋转质心坐标系下的椭圆型外限制性系外行星三体问题的哈密顿方程比较复杂，并且具有坐标和动量的交叉项显含时间变量，哈密顿量不再守恒，因此，力梯度辛算法的应用遇到了困难。然而哈密顿方程的前半部分具有解析解，我们通过扩展相空间，将时间变量视为一个新坐标，可以得到一个新的自治哈密顿量，通过重新计算力梯度算子的表达式进而构造显式的力梯度辛算法。本文的主要目的是在陈云龙和伍歆[44] 的工作及 Zhang

等人[45]工作基础上进一步推广力梯度辛算法在旋转质心坐标系下的椭圆型外限制性三体问题中的应用。在椭圆型外限制性系外行星三体问题中采用通常的四阶 Forest-Ruth 辛算法及其优化算法，与本文构造的四阶力梯度辛算法及其优化算法进行数值模拟比较；探讨力梯度辛算法在求解椭圆型外限制性系外行星三体问题中的精度和效率是否优于非力梯度辛算法；找到在椭圆型外限制性系外行星三体问题中数值表现能力最好的积分器，然后应用得到的可靠的混沌判别指标进行相空间扫描，讨论在椭圆型外限制性系外行星三体问题中各参数与行星轨道动力学稳定性的关系。

2 算法介绍

假设动能 $T(p)$ 是一个关于 n 维动量 p 的二次函数，即 $T=T(p)=p^2/2$，势能 $V(q)$ 是 n 维坐标 q 的函数。它们组成的哈密顿函数为：

$$H(p,q)=T(p)+V(q) \quad . \tag{1}$$

分别以 A 和 B 约定 T 和 V 的 Lie 算子，可得：

$$A=\sum_{i=1}^{n} T_i \frac{\partial}{\partial q_i} \quad , \tag{2}$$

$$B=-\sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial}{\partial p_i} \quad . \tag{3}$$

这里，$T_i=\partial T/\partial p_i$，$V_i=\partial V/\partial q_i$。$A$ 算子分别作用于坐标和动量，我们可以得到 $\dot{q}_i=Aq_i=Tp_i$ 和 $\dot{p}_i=Ap_i\equiv 0$，显然 A 算子仅仅对位置坐标有作用，称 A 为位置型算子。B 算子分别作用于坐标和动量，得到 $Bp_i=-Vq_i$ 和 $Bq_i\equiv 0$，B 算子是动量型算子。利用两个算子对称构造出二阶 Verlet 辛积分器：

$$e^{W}=e^{\frac{1}{2}hB}e^{hA}e^{\frac{1}{2}hB} \quad . \tag{4}$$

它是 $T+V$ 分解形式下的显式辛算法。其中 h 是积分的时间步长，W 用 Baker-Campbell-Hausdroff (BCH) 公式可以写成：

$$W=h(A+B)+h^3\left(-\frac{1}{12}[A,[B,A]]+\frac{1}{24}[B,[A,B]]+O(h^5)\right) \quad . \tag{5}$$

规定互易子 $[A,B]=AB-BA$，于是有 $C=[B,[A,B]]=[B,AB-BA]=2BAB-BBA-ABB$。容易验证 $BBA_{q_i}=BBAp_i\equiv 0$, $ABB_{q_i}=ABB_{p_i}\equiv 0$, $BAB_{q_i}\equiv 0$。因此得到三阶截断误差项：

$$C=[B,[A,B]]=2\sum_{i,j,k=1}^{n} V_{ij}V_kT_{jk}\frac{\partial}{\partial p_i}=2\sum_{i,j=1}^{n} f_j\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_i}=\sum_{i=1}^{3}\bigtriangledown_i f^2\frac{\partial}{\partial p_i} \quad , \tag{6}$$

其中，$V_{ij}=\partial^2 V/\partial q_i\partial q_j$, $V_k=\partial V/\partial q_k$, $T_{jk}=\partial^2 T/\partial p_j\partial p_k$, $f=(-V_1,-V_2,-V_3,\cdots,-V_n)$。算子 C 与 B 属于同类动量型算子，称为力梯度算子。早在 1983 年，Ruth[6] 在首次给出三阶显式辛算法时，将力梯度算子加入势能所对应的 Lie 算子中，构造了显式的三阶力梯度辛算法。这种力梯度辛算法有效地避免了使用负积分步长，相较于同阶的常用辛算法，形式更加简单并且精度更高。后来，Chin 等人[34–36, 46, 48–50] 发展了这种力梯度辛算法并扩展到了四阶，将其成功应用到经典力学与量子力学模型中，证明了这种力梯度辛算法的误差精度相较于同阶常用辛算法更具优势。显式四阶力梯度辛算法 (F4) 为：

$$F4=e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)hA}e^{\frac{1}{2}hB+\frac{2-\sqrt{3}}{48}h^3C}e^{\frac{1}{\sqrt{3}}hA}e^{\frac{1}{2}hB+\frac{2-\sqrt{3}}{48}h^3C}e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)hA} \quad . \tag{7}$$

结合力梯度辛算法和最优化辛算法的思想，Omelyan 等人[38] 在力梯度辛算法中引入了算法最优化思想，令五阶截断误差各项系数的平方和最小，得到了最优化的四阶力梯度辛算法 (OF4)：

$$OF4=e^{ahB}e^{bhA}e^{(0.5-a)hB+ch^3C}e^{(1-2b)hA}e^{(0.5-a)hB+ch^3C}e^{bhA}e^{ahB} \quad , \tag{8}$$

其中算子的系数为：

$$\begin{aligned} a &= 0.878\ 936\ 860\ 168\ 070\ 9\times 10^{1} \quad ,\\ b &= 0.281\ 398\ 061\ 166\ 771\ 9 \quad ,\\ c &= 0.306\ 181\ 012\ 236\ 977\ 0\times 10^{-2} \quad . \end{aligned}$$

本文以 Forest-Ruth 四阶辛算法 (FR)[29] 及其优化算法 (OFR)[33, 37] 作参考，评估 F4 和 OF4 算法的性能：

$$\begin{cases} FR=e^{\frac{c}{2}hA}e^{chB}e^{\frac{1-c}{2}hA}e^{(1-2c)hB}e^{\frac{1-c}{2}hA}e^{chB}e^{\frac{c}{2}hA} \\ c=\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{2}} \end{cases} \quad , \tag{9}$$

$$OFR=e^{\xi hB}e^{\frac{1-2\lambda}{2}hA}e^{\chi hB}e^{\lambda hA}e^{(1-2(\chi-\xi))hB}e^{\lambda hA}e^{\chi hB}e^{\frac{1-2\lambda}{2}hA}e^{\xi hB} \quad , \tag{10}$$

这里各算子的系数为：

$$\begin{aligned} \xi &= 0.172\ 086\ 559\ 029\ 514\ 3 \quad ,\\ \lambda &= -0.091\ 562\ 030\ 755\ 156\ 78 \quad ,\\ \chi &= -0.161\ 621\ 762\ 210\ 722\ 2 \quad . \end{aligned}$$

正如引言所云，力梯度辛算法的应用不限于动能 T 为动量二次标准形式。陈云龙和伍歆[44] 将力梯度辛方法推广应用于动能是动量的二次函数形式的圆型限制三体问题。下面我们进一步将力梯度辛算法推广应用到椭圆型限制三体问题中。

3 椭圆型外限制性系外行星三体问题

3.1 物理模型

在惯性坐标系中讨论椭圆型限制性三体问题的动力学积分，可以将哈密顿方程写成可分离变量的形式，从而可以利用显形式辛积分器。但由于每一步都要涉及两个主天体位置矢量的计算，而且必须求解开普勒方程，特别是双星偏心率较大时，计算量明显增加，计算效率低。而采用旋转质心坐标系时横坐标始终在两主天体的连线上，两主天体的坐标矢量是不变的，可以大大减少计算量。因此我们选择在旋转质心坐标系下讨论平面椭圆型限制性三体问题。

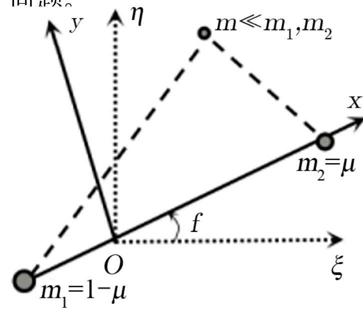


图 1 旋转质心坐标系 $O-xy$ 下椭圆型限制三体问题构型

记两主天体的质量为 m_1, m_2，它们的质心记作 O。假设以双星质心为原点的质心坐标系为 $O-\xi\eta$，行星坐标为 (ξ,η)，以双星质心为原点的旋转质心坐标系为 $O-xy$，行星坐标为 (x,y) (见图 1)。xy 面即为两主天体的运动平面，旋转质心坐标系的旋转速度与两主天体的运动角速度 $\dot{f}$ 一致。质心坐标系与旋转质心坐标系下的位置变量关系为:

$$\begin{cases} x=\xi\cos f+\eta\sin f \\ y=-\xi\sin f+\eta\cos f \\ \dot{x}=-\xi\sin f\cdot\dot{f}+\eta\cos f\cdot\dot{f}+\dot{\xi}\cos f+\dot{\eta}\sin f \\ \dot{y}=-\xi\cos f\cdot\dot{f}-\eta\sin f\cdot\dot{f}-\dot{\xi}\sin f+\dot{\eta}\cos f \end{cases}, \tag{11}$$

其中，$\dot{f}=(1-e_1^2)^{\frac{-3}{2}}(1+e_1\cos f)^2$。

为了简化问题，取适当的计算单位，让引力常数 $G=1$。质量单位取 $m_1+m_2=M$，$\mu=m_2/M$ 为第二天体的无量纲质量，该天体的位置为 $(1-\mu,0)$，另一主天体的无量纲质量为 $1-\mu=m_1/M$，位置为 $(-\mu,0)$。长度单位取两主天体的相互距离 $r_1=a_1(1-e_1^2)/(1+e_1\cos f)$[51]，其中 a_1, e_1 和 f 分别为 m_2 相对于 m_1 的轨道半长径、轨道偏心率和真近点角。

在上述单位制下，广义坐标 q 和广义动量 p 分别为:

$$\begin{cases} q=r \\ p=p'+a \end{cases}, \tag{12}$$

其中，$r=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a=\begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q'=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}f}$。相应的哈密顿函数为:

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right)+\left(q_2p_1-q_1p_2\right)-\varOmega\left(q,f\right) \\ \varOmega\left(q,f\right)=\frac{1}{1+e_1\cos f}\left[\frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2\right)+U\left(q\right)\right]-\frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2\right) \\ U\left(q\right)=\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2} \\ r_1=\sqrt{\left(q_1+\mu\right)^2+q_2^2} \\ r_2=\sqrt{\left(q_1-\left(1-\mu\right)\right)^2+q_2^2} \end{cases} , \tag{13}$$

其中，e_1 为双星轨道偏心率。哈密顿方程含有位置和动量的交叉项 $q_2p_1-q_1p_2$，T 不是动量的严格二次型，并且含有时间变量 f，因此，哈密顿量不守恒，系统不可分离，力梯度辛算法无法直接使用。

3.2 力梯度算子的构建

我们将 f 视为坐标的一个分量 q_0，并加入对应的动量 p_0，对式 (13) 进行相空间扩充。令 $p_0=-H$, $q_0=f$，得到一个新的守恒的哈密顿量 $H^*\equiv 0$。哈密顿方程的前半部分是有解析解的，因此相空间扩充后的哈密顿方程仍然可以分离成“动能 T”和“势能 V”两个可积部分分别求解。新的哈密顿方程为

$$\begin{cases} H^* = T\left(q_1,q_2,p_1,p_2,p_0\right)+V\left(q_1,q_2,q_0\right) \\ T\left(q_1,q_2,p_1,p_2,p_0\right)=\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right)+q_2p_1-q_1p_2+p_0 \\ V\left(q_1,q_2,q_0\right)=-\varOmega\left(q_1,q_2,q_0\right) \end{cases} . \tag{14}$$

动能 T 含有坐标和动量的交叉项，不再是动量 p 的严格二次型，所以 A 算子的形式不再是式 (2) 的形式，而是坐标和动量的混合型算子：

$$A=\sum_{i=0}^{2}\left(T_{p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-T_{q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) . \tag{15}$$

势能 V 的 Lie 算子 C 为：

$$C=[B,[A,B]]=[B,AB-BA]=2BAB-BBA-ABB . \tag{16}$$

可以验证

$$\begin{cases} BBA_{q_i}=BBA_{p_i}=0 \\ ABB_{q_i}=ABB_{p_i}=0 \\ BAB_{q_i}=0 \end{cases} . \tag{17}$$

但是，

$$BAB_{p_i}=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=0}^{2}V_{ij}V_kT_{jk}\frac{\partial}{\partial p_i} , \tag{18}$$

于是，我们得到：

$$C = 2\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=0}^{2} V_{ij}V_kT_{jk}\frac{\partial}{\partial p_i} \quad . \tag{19}$$

根据式 (14) 中的 $T(q_1, q_2, p_1, p_2, p_0)$ 可知，当 $j \neq k$ 时，$T_{jk} = 0$；当 $j = k = 0$ 时，$T_{jk} = 0$；显然，只有 $j = k$ 且 $j \neq 0$ 时，$T_{jk} = 1$。因此，可以得到：

$$\begin{aligned} C =& 2\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{2} V_{ij}V_j\frac{\partial}{\partial p_i} = \\ & 2\left(V_{01}V_1 + V_{02}V_2\right)\frac{\partial}{\partial p_0} + 2\left(V_{11}V_1 + V_{12}V_2\right)\frac{\partial}{\partial p_1} + 2\left(V_{21}V_1 + V_{22}V_2\right)\frac{\partial}{\partial p_2} \quad . \end{aligned} \tag{20}$$

上式表明算子 C 是两主天体引力的力梯度算子。所以，旋转质心坐标系下的椭圆型外限制性三体问题仍然可以用力梯度辛算法求解。

接下来，我们分别给出该系统 T 部分和 V 部分对应的正则方程。

(1) 动能 T 部分对应的正则方程

利用式 (14) 可以得到动能 T 中算子 A 作用于坐标 q_i 和动量 p_i 的微分方程组为：

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = \dfrac{\partial T}{\partial p_0} = 1 \\ \dot{q}_1 = \dfrac{\partial T}{\partial p_1} = p_1 + q_2 \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial T}{\partial p_2} = p_2 - q_1 \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial T}{\partial q_1} = p_2 \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial T}{\partial q_2} = -p_1 \end{cases} \quad . \tag{21}$$

从积分初始状态量 $\left(q_{0(0)}, q_{1(0)}, q_{2(0)}, p_{1(0)}, p_{2(0)}\right)$ 出发，经过时间 f 后获得该方程组的解：

$$\begin{cases} q_0 = q_{0(0)} + f \\ q_1 = q_{1(0)}\cos f + q_{2(0)}\sin f + f\left(p_{1(0)}\cos f + p_{2(0)}\sin f\right) \\ q_2 = q_{2(0)}\cos f - q_{1(0)}\sin f + f\left(p_{2(0)}\cos f - p_{1(0)}\sin f\right) \\ p_1 = p_{1(0)}\cos f + p_{2(0)}\sin f \\ p_2 = p_{2(0)}\cos f - p_{1(0)}\sin f \end{cases} \quad . \tag{22}$$

上式意味着混合算子 A 是可积可解的。

(2) 势能 V 部分对应的正则方程

式 (14) 可得势能 V 中算子 B 作用于动量 p_i 的微分方程组，可得：

$$\begin{cases} \dot{p_0} = -\dfrac{\partial V}{\partial q_0} = -V_0(q_1, q_2, q_0) \\ \dot{p_1} = -\dfrac{\partial V}{\partial q_1} = -V_1(q_1, q_2, q_0) \\ \dot{p_2} = -\dfrac{\partial V}{\partial q_2} = -V_2(q_1, q_2, q_0) \end{cases} . \tag{23}$$

势能 V 中算子 C 作用于动量 p_i 的微分方程组，可得：

$$\begin{cases} \dot{p_0} = 2V_{01}(q_1, q_2, q_0)V_1(q_1, q_2, q_0) + 2V_{02}(q_1, q_2, q_0)V_2(q_1, q_2, q_0) \\ \dot{p_1} = 2V_{11}(q_1, q_2, q_0)V_1(q_1, q_2, q_0) + 2V_{12}(q_1, q_2, q_0)V_2\,(q_1, q_2, q_0) \\ \dot{p_2} = 2V_{21}(q_1, q_2, q_0)V_1(q_1, q_2, q_0) + 2V_{22}(q_1, q_2, q_0)V_2(q_1, q_2, q_0) \end{cases} . \tag{24}$$

势能 V 部分的解为：

$$\begin{cases} p_0 = p_{0(0)} - b_i h V_0(q_1, q_2, q_0) + c_i h^3 \cdot 2(V_{01}(q_1, q_2, q_0)V_1(q_1, q_2, q_0) + \\ \qquad V_{02}(q_1, q_2, q_0)V_2(q_1, q_2, q_0)) \\ p_1 = p_{1(0)} - b_i h V_1(q_1, q_2, q_0) + c_i h^3 \cdot 2(V_{11}(q_1, q_2, q_0)V_1(q_1, q_2, q_0) + \\ \qquad V_{12}(q_1, q_2, q_0)V_2\,(q_1, q_2, q_0)) \\ p_2 = p_{2(0)} - b_i h V_2(q_1, q_2, q_0) + c_i h^3 \cdot 2(V_{21}(q_1, q_2, q_0)V_1(q_1, q_2, q_0) + \\ \qquad V_{22}(q_1, q_2, q_0)V_2(q_1, q_2, q_0)) \end{cases} , \tag{25}$$

其中，b_i 和 c_i 是 B 算子和 C 算子各阶的系数，$(p_{0(0)}, p_{1(0)}, p_{2(0)})$ 为积分初始状态量。

4　算法的性能检验与应用

4.1　初始条件

本文以双星质量比 $\mu = 0.1$ 的双星构型为例，研究椭圆型外限制性系外行星三体问题。双星的轨道半长径取 $a_1 = 1$ AU。1998 年 Holman 和 Wiegert[52] 的研究发现，在双星外存在一个轨道临界半长径，在这个临界半长径以内行星是不稳定的，而在这个临界半长径以外可以长期稳定存在。临界半长径经验公式如下：

$$\begin{aligned} a_c = &(1.60 \pm 0.04) + (5.10 \pm 0.05)\,e_1 + (-2.22 \pm 0.11)\,e_1^2 + (4.12 \pm 0.09)\,\mu + \\ &(-4.27 \pm 0.17)\,e_1\mu + (-5.09 \pm 0.11)\,\mu^2 + (4.61 \pm 0.36)\,e_1^2\mu^2 \ , \end{aligned} \tag{26}$$

其中，a_c 是行星轨道临界半长径，e_1 和 μ 分别是双星偏心率和双星质量比 (定义为 $m_2/\,(m_1 + m_2)$，其中 m_1 是指质量大的恒星，m_2 是指质量小的恒星)。

根据行星临界半长径的经验公式 (26)，取行星的初始半长径为 $a_2 = 2.5a_c$，再通过行星的轨道根数 $a, e, i, \Omega, \omega, M$ (分别为行星轨道半长径、偏心率、轨道倾角、升交点经度、近点角距、平近点角) 与位置和速度之间的关系求解出行星的初始位置和动量。由于我们考虑的是共面情况，所以初始值取 $i = \Omega = \omega = M = 0°$。首先根据牛顿迭代法求解开普勒方程

$$E - e\sin E = M \quad , \tag{27}$$

得到偏近点角 E，然后代入用偏近点角 E 表示的位置和动量的关系式中：

$$\boldsymbol{r} = a\left(\cos E - e\right)\boldsymbol{P} + a\sqrt{1-e^2}\sin E\boldsymbol{Q} \quad , \tag{28}$$

$$\boldsymbol{v} = -\frac{a^2 n}{r}\sin E\boldsymbol{P} + \frac{a^2 n}{r}\sqrt{1-e^2}\cos E\boldsymbol{Q} \quad , \tag{29}$$

其中，$n = \sqrt{\mu/a^3}$ 是平均角速度，$r = a(1 - e\cos E)$ 是两主天体之间的相对距离，矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 表示为：

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i \\ \sin\omega\sin i \end{pmatrix} , \tag{30}$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i \\ -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i \\ \cos\omega\sin i \end{pmatrix} . \tag{31}$$

表 1　双星和行星的初始条件

双星	行星
$a_1 = 1$ AU	$a_2 = 2.5a_c$
$\mu = 0.1$	$i = \Omega = \omega = M = 0°$
$e_1 = 0.1$	$e_2 = 0.05, 0.48$

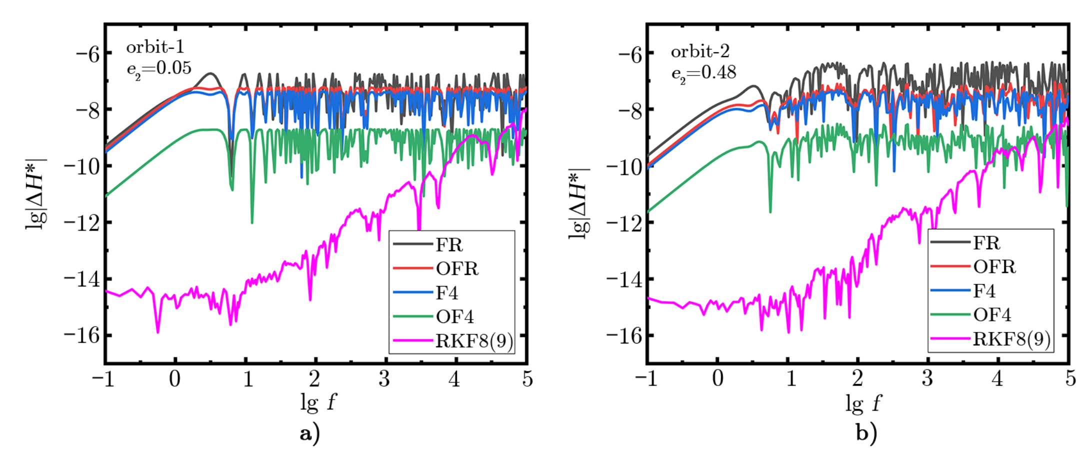
便可得到轨道演化的初始位置和动量。表 1 列举了数值模拟的主要初始条件。

4.2　数值模拟

令双星偏心率 $e_1 = 0.1$，再根据式 (26)，取行星轨道半长径 $a_2 = 6$，使用固定时间步长 $h = 0.08$。选择两个不同的行星轨道初始条件讨论对应的轨道稳定性：$e_2 = 0.05$ 和 $e_2 = 0.48$。

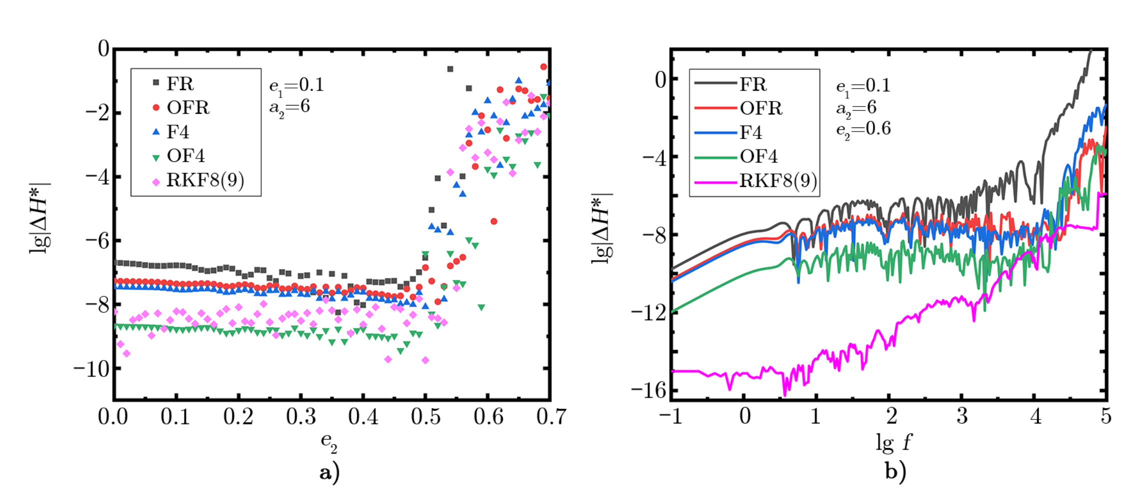
用 Forest-Ruth 四阶辛算法 (FR)、优化的四阶辛算法 (OFR)、四阶力梯度辛算法 (F4) 和优化的四阶力梯度辛算法 (OF4) 分别积分两个轨道，并采用自适应步长 RKF8(9) 方法提供更高精度的参考解决方案。图 2 给出了各算法计算出的两个轨道的能量误差 ΔH^*，这里 $\Delta H^* = H^*(f) - H^*(0)$，且 $H^*(f)$ 和 $H^*(0)$ 是在时间 f 和 0 的哈密顿量，积分时间是 10^5 (本文中积分时间和积分步长都是无量纲单位)。显然，不管是在轨道 1 还是轨道 2 中，对于同类算法，优化的要比未优化的辛算法精度好，并且本文构造的力梯度辛算法比同阶非力梯度的辛算法精度好。我们发现不同轨道下相同算法的精度不同，为了更清楚地了解行星偏心率对算法精度的影响，图 3 a) 绘制了算法给出的能量误差对行星偏心率的依赖关系。结果发现在不同行星偏心率时算法的精度不同，并且在行星偏心率 $e_2 > 0.55$ 时精度变化波动比较大。为了进一步了解在行星偏心率较大时算法的精度比较，我们选取行星偏心率 $e_2 = 0.6$

的轨道，给出了算法的误差精度图，图 3 b) 显示在行星偏心率较大时，短时间的积分情况下依旧是力梯度辛算法的精度优于非力梯度辛算法，但由于行星偏心率较大导致长时间的积分后算法都发生了失真现象。这说明在行星偏心率较大时算法不适用，而在偏心率小的情况下结果会更可靠。总的来说，在算法未发生失真时，构造的力梯度辛算法的精度是优于非力梯度辛算法的，并且 OF4 算法的数值表现能力最好。此外，我们又选择了双星质量比 $\mu = 0.2$ 的双星构型，令初始值 $e_1 = 0.05$, $a_2 = 6.5$，使用固定时间步长 $h = 0.08$，绘制各算法的能量误差与行星偏心率的关系图 4，得到相同的结论。对于大偏心率轨道需引入时间变换实施辛算法[18, 53]，这一问题在未来的工作中讨论。



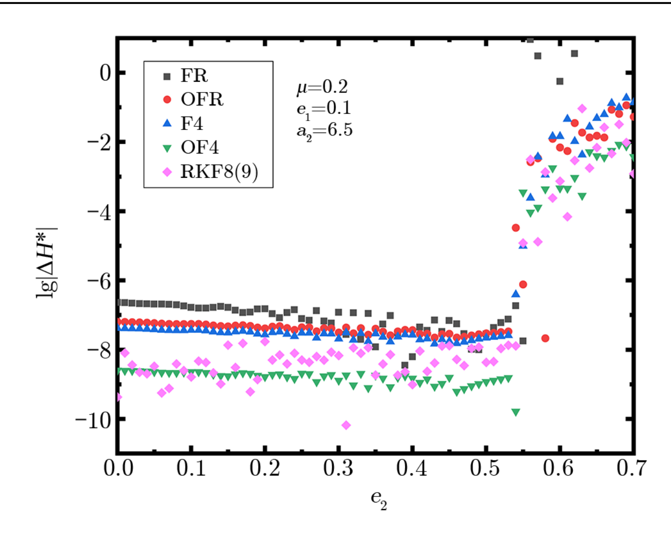
注：使用的算法分别为 FR, OFR, F4, OF4 和 RKF8(9)。$e_1 = 0.1$, $a_2 = 6$，时间步长是 $h = 0.08$，积分时间为 10^5。

图 2　在椭圆型外限制性系外行星三体问题中不同算法分别解决两个轨道的能量误差值



注：$e_1 = 0.1$, $a_2 = 6$，同一时间步长 $h = 0.08$，给定 e_2 值，积分 10^5 之后得到的误差。

图 3　a) 在椭圆型外限制性系外行星三体问题中各算法的能量误差与行星偏心率的关系；b) 行星偏心率 $e_2 = 0.6$ 时各算法的能量误差值



注：初始值 $e_1 = 0.1$，$a_2 = 6.5$，时间步长是 $h = 0.08$，积分时间为 10^5。

图 4　双星质量比 $\mu = 0.2$ 的双星构型中各算法的能量误差与行星偏心率的关系

4.3　动力学性质

由于 OF4 方法在能量守恒和算法精度上具有最好的数值表现能力，FLI 在效率和灵敏度上都优于最大 Lyapunov 指数，因此我们用 OF4 算法和 FLI 混沌指标来扫描由椭圆型外限制性系外行星三体系统中的行星偏心率 e_2 和行星轨道半长径 a_2 所决定的参数空间，研究它们与行星轨道动力学稳定性的关系。

确定轨道混沌性质的方法主要有：Poincore 截面、最大 Lyapunov 指数、快速 Lyapunov 指标、较小排列指标、0-1 指标和频谱分析等[54]。Lyapunov 指数和快速 Lyapunov 指数是区分系统有序混沌最常用的方法，它们克服了 Poincore 截面仅限于相空间为四维的保守系统的局限。Lyapunov 指数是衡量两邻近轨道随时间平均指数分离比的指标，能够反映混沌的强度。通常采用最大 Lyapunov 指数，其计算方法主要有变分法和两粒子法[55]。构造变分方程及其解通常不容易，考虑到应用的方便，一般采用两邻近轨道的差来代替变分方程的解，即两粒子法，定义为：

$$\lambda = \lim_{f\to\infty} \frac{1}{f} \ln \frac{d\,(f)}{d\,(0)} \quad , \tag{32}$$

其中，$d\,(f)$ 和 $d\,(0)$ 是两邻近轨道分别在 f 时刻和 0 时刻的距离。需要注意的是，初始距离 $d\,(0)$ 的选择必须适当，如果 $d\,(0)$ 太大，则相邻两轨道间的差值将与变分方程的解差别太大；如果 $d\,(0)$ 太小，则舍入误差会增大。Tancredi 等人[56]认为，就双精度而言初始距离的最佳选择应为 $d\,(0) = 10^{-8}$。式 (32) 随时间指数增大，会出现溢出现象，需要重整化处理，并且需要适当考虑重整化次数。混沌有序的判断标准是：若 $\lg|\lambda|$ 趋向于一个固定常数，有界系统是混沌的；若 $\lg|\lambda|$ 趋向负无穷，则系统是有序的。

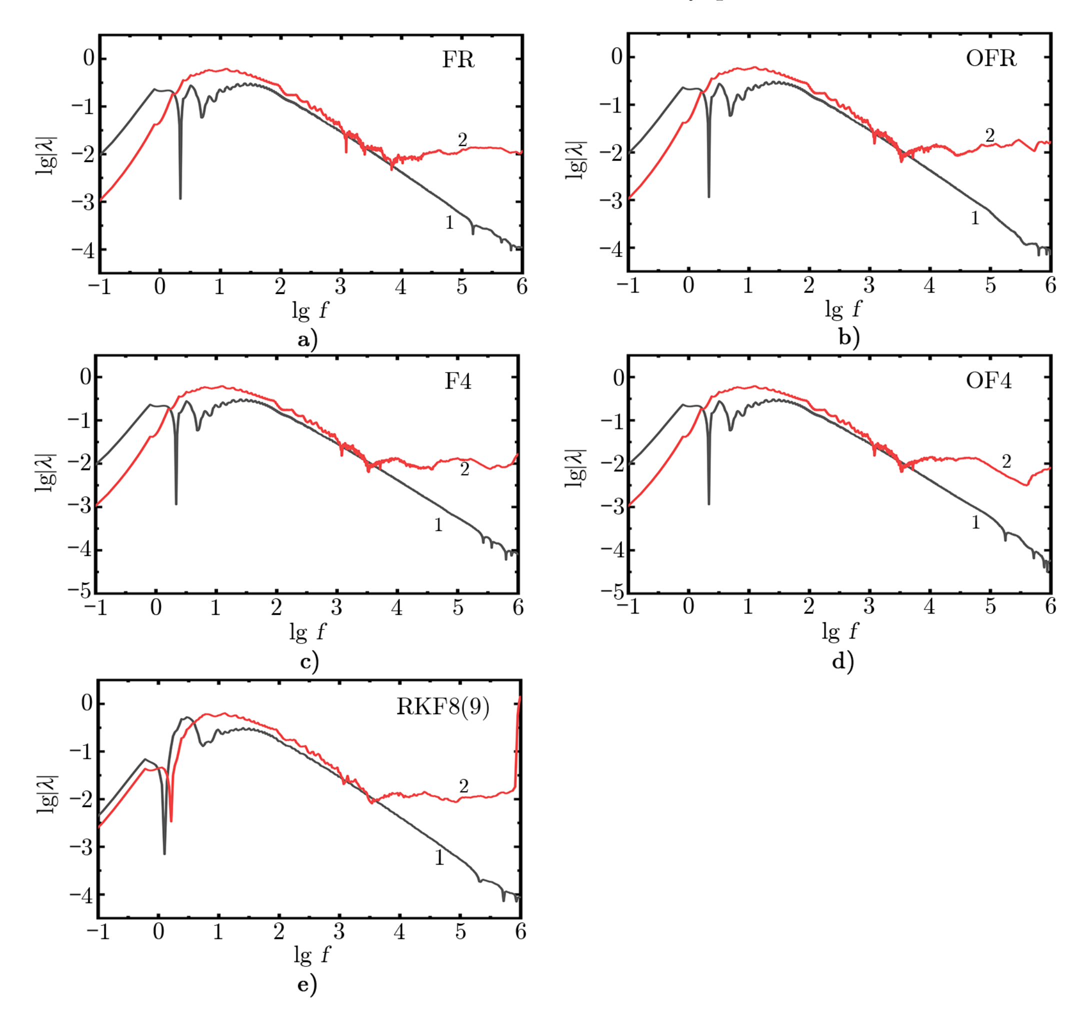
与最大 Lyapunov 指数相比，快速 Lyapunov 指数 (FLI) 计算过程更简单，能够更快、更灵敏地区分有序轨道和混沌轨道。由于具有快速识别混沌的优点，FLI 常被用来追踪行

星的轨道稳定性和研究其他动力学问题[57–59]。FLI 也可以用两粒子法计算[60]，定义为：

$$FLI = \lg \frac{d(f)}{d(0)} \quad . \tag{33}$$

快速 Lyapunov 指数也需要不断重整化，并且重整化次数相对于最大 Lyapunov 指数少一些。当 $d(f) \geqslant 1$ 时实施重整化，即沿着向量 $d(f)$ 的方向将邻近轨道强行拉回到与轨道相距 $d(0)$ 处，然后再从该点开始进行下次积分。混沌有序的判断标准是：FLI 呈线性增长时轨道有序，呈指数增长时有界轨道混沌。

图 5 和图 6 分别给出了各算法求解两个轨道的最大 Lyapunov 指数和 FLI 示意图。

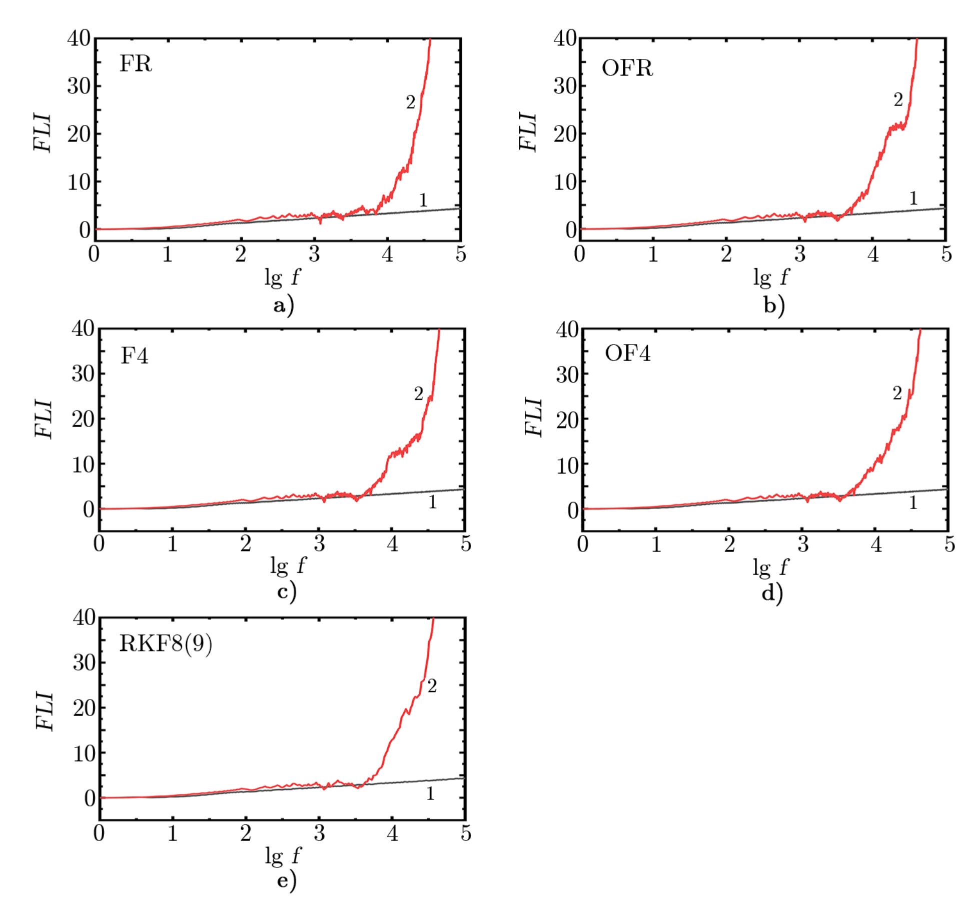


注：积分时间为 10^6。

图 5　椭圆型外限制性系外行星三体问题中不同算法分别求解两个轨道的最大 Lyapunov 指数

图 5 a)—e) 中，轨道 1 的 Lyapunov 指数随时间线性减少，但在积分期间并不倾向于一个稳定值，这意味着轨道 1 是有序的；另一方面，轨道 2 的最大 Lyapunov 指数在积分期间

趋向一个稳定值，毫无疑问轨道 2 是混沌的。在图 6 a)—e) 中，轨道 1 的 FLI 随时间呈代数增长，轨道是有序的；轨道 2 的 FLI 呈指数增长，是混沌的。可以看到最大 Lyapunov 指数和 FLI 在不同算法积分下给出了一致的有序、混沌判断结果：轨道 1 是有序的，轨道 2 是混沌的。但是，在区分轨道混沌有序时快速 Lyapunov 指数比最大 Lyapunov 指数更敏感。利用最大 Lyapunov 指数去区分混沌有序至少需要积分 10^5，而 FLI 只需要积分 10^4，所以 FLI 是判断混沌更好的指标选择。



注：积分时间为 10^5。

图 6　在椭圆型外限制性系外行星三体问题中不同算法分别求解两个轨道的 FLI 示意图

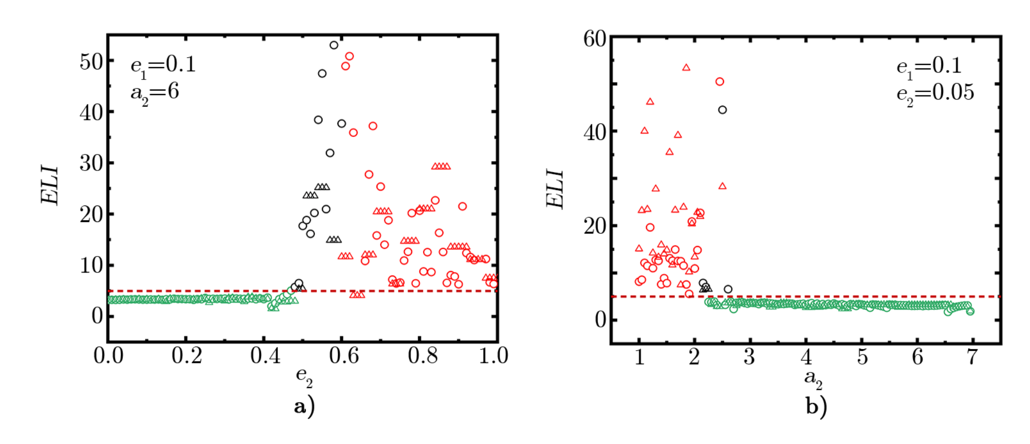
除了上面的两条轨道，我们还模拟若干不同轨道下的 FLI 示意图，结果和图 6 一样，这里就不再展示。模拟结果表明，$FLI = 5$ 可以作为轨道有序或有界混沌的临界值，即当轨道的 $FLI < 5$ 时，轨道是有序的，当 $FLI > 5$ 时轨道是有界混沌或者无界不稳定的。表 2 给出了在图 2 a)、图 5 和图 6 中各算法求解轨道 1 所需的 CPU 时间，对比了计算成本。毫无疑问，力梯度辛算法的计算需要一些额外的计算成本，但不是很昂贵。详细的 CPU 时间见表 2。

表 2　不同算法求解轨道 1 所需的 CPU 时间　s

不同算法	CPU 时间		
	Err	λ	*FLI*
FR	7	90	7
OFR	7	102	8
F4	7	105	8
OF4	9	126	8
RKF8(9)	31	496	64

注：*Err*, λ 和 *FLI* 对应的时间分别为求解能量误差 (积分时间为 10^5)、最大 Lyapunov 指数 (积分时间为 10^6) 和 *FLI* (积分时间为 10^5) 的 CPU 时间。

令初始值 $e_1 = 0.1$, $a_2 = 6$ 固定不变，将 e_2 的初始值由 0 以 0.01 的间隔递增到 1，每条轨道使用 OF4 方法皆积分 10^4 后计算 *FLI* 值，同时使用 RKF8(9) 方法作参考。图 7 a) 显示，当行星偏心率 $e_2 \in (0.0, 0.44)$ 时，轨道是稳定有序的；而对于更大的偏心率 $e_2 \in (0.45, 1)$ 时，轨道是有界混沌或者无界不稳定的。这一结果表明，在椭圆型外限制性系外行星三体系统中，行星轨道动力学稳定性与行星轨道偏心率之间存在明确的依赖关系，行星偏心率越大，轨道就越容易出现有界混沌或者无界不稳定。



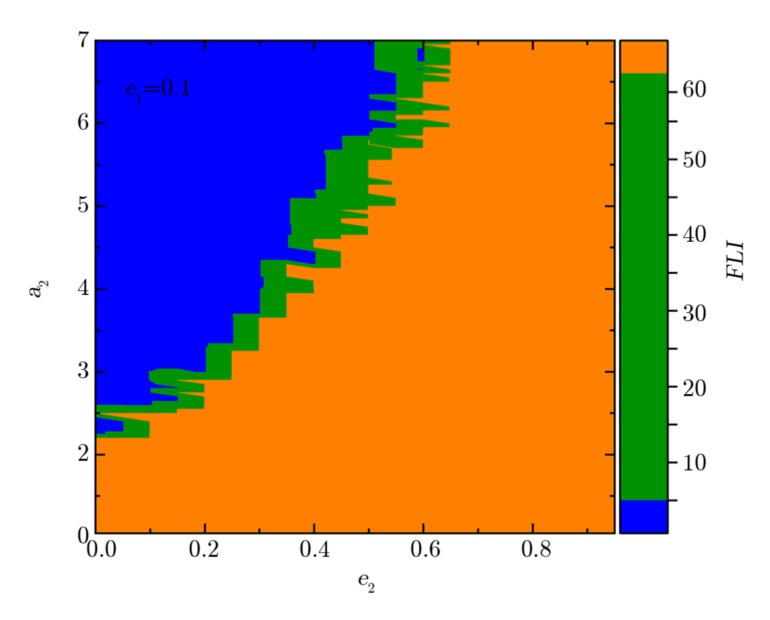
注：其中圆形的是 OF4 计算的结果，三角形的是 RKF8(9) 计算的结果。相同的时间步长 $h = 0.08$，每个 *FLI* 是在积分时间 10^4 之后得到的。红色虚线对应 $FLI = 5$，这是混沌区域和有序区域之间的边界。当 $FLI < 5$ 且积分后的轨道半径 $R < 200$ AU 时，是有序轨道；当 $FLI > 5$ 时，$R < 200$ AU 且积分后的偏心率 $e_2 < 1$ 时，是有界混沌轨道；当 $R > 200$ AU 或 $e_2 \geqslant 1$ 时，是无界不稳定轨道。绿色的圆形和三角形表示有序轨道，黑色的圆形和三角形表示有界混沌轨道，红色的圆形和三角形表示无界不稳定轨道。

图 7　使用 OF4 和 RKF8(9) 方法计算出的 *FLI* 分别跟 e_2 和 a_2 的变化关系

初始值 $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.05$ 固定不变，将 a_2 的初始值由 1 以 0.05 的间隔递增到 7，对不同的行星轨道半长径皆积分 10^4 之后计算 *FLI* 值，从而得到不同的行星轨道半长径 a_2 对应的轨道 *FLI* 值的变化，得出不同轨道的混沌有序性。图 7 b) 将所有结果展现出来，可见在 $a_2 = 2.3$ 附近发生了从有序到混沌的动态转变，在这个值以外是有序的，而在这个值以

内是混沌或者不稳定的，即 $a_2 \in (2.4, 7)$ 时，轨道是有序的，而在 $a_2 \in (1, 2.3)$ 时，轨道是有界混沌或者无界不稳定的。显然，椭圆型外限制性系外行星三体系统的动力学稳定性与行星的轨道半长径也有直接联系，行星的轨道半长径越小，行星轨道越容易发生混沌甚至不稳定现象。

为了更好地了解行星偏心率和行星轨道半长径对轨道混沌边界的影响，我们令 $e_1 = 0.1$ 不变，扫描一个由参数 e_2 和 a_2 决定的二维相空间，探究二维平面生成 FLI 的轮廓图。由图 8 可见，对于椭圆型外限制性系外行星三体系统来说，在行星偏心率 e_2 偏大而行星轨道半长径 a_2 偏小的区域更容易出现混沌甚至轨道不稳定。



注：初始值 $e_1 = 0.1$ 是固定的。当 $FLI < 5$ 且积分后的轨道半径 $R < 200$ AU 时，是有序轨道；当 $FLI > 5$, $R < 200$ AU 且积分后的偏心率 $e_2 < 1$ 时，是有界混沌轨道；当 $R > 200$ AU 或 $e_2 \geqslant 1$ 时，是无界不稳定轨道。蓝色区域表示有序轨道，绿色区域表示有界混沌轨道，橙色区域表示无界不稳定轨道。

图 8　利用 FLI 扫描参数 e_2 和 a_2 的二维空间来寻找混沌

5　总结与展望

本文通过相空间扩展将非保守的哈密顿系统变换为自治的哈密顿系统，重新计算力梯度算子的表达式并构造力梯度辛算法，在平面椭圆型外限制性系外行星三体问题中实现了力梯度辛算法的应用。选取不同的轨道讨论了四种辛算法的精度和稳定性。数值模拟结果表明，在平面椭圆型外限制性系外行星三体问题中，本文构造的力梯度辛算法的精度优于非力梯度辛算法，并且优化后的辛算法的精度优于未优化的。优化的四阶力梯度辛算法具有最高的数值精度，四种辛算法的精度比较为 $OF4 > F4 > OFR > FR$。此外，本文采用 OF4

算法和快速 Lyapunov 指数进行相空间扫描，研究了椭圆型外限制性三体系统中行星的轨道偏心率和轨道半长径变化对行星轨道稳定性的影响。结果表明，在椭圆型外限制性系外行星三体系统中，行星轨道动力学稳定性与行星的轨道偏心率及轨道半长径都有着密切联系。行星的轨道偏心率越大，行星越容易发生混沌甚至轨道不稳定现象；行星轨道半长径越小，行星越容易出现混沌甚至不稳定；在行星偏心率偏大而行星轨道半长径小的区域，轨道更容易出现混沌甚至不稳定。

我们在这里讨论的椭圆型外限制性三体问题其实都是假设了理想状态，并且讨论的都是共面情况，忽略了很多影响因素。未来希望对天体运动的研究不仅停留在这种理想情况下，更希望找到数值表现能力更好的时间变换力梯度辛算法和混沌指标，以解决空间椭圆型外限制性三体问题和椭圆型内限制性三体问题，并进一步考虑影响行星轨道运行的其他因素，更加准确地刻画天体动力学的定性性质。

参考文献：

[1] 刘彬. 博士论文. 安徽: 中国科学技术大学, 2016: 1
[2] 易照华. 天体力学基础. 南京: 南京大学出版社, 1993: 121
[3] 周济林. 天体力学基础. 北京: 高等教育出版社, 2005: 50
[4] 刘秉正. 非线性动力学. 北京: 高等教育出版社, 2004: 132
[5] Feng K. Difference Schemes and Symplectic Geometry. Beijing: Science Press. 1984: 42
[6] Ruth R D. IEEE Trans Nucl Sci, 1983, NS-30(4): 2669
[7] Hu S Y, Wu X, Huang G Q, et al. ApJ, 2019, 887: 191
[8] Hu S Y, Wu X, Liang E. ApJS, 2021, 253: 55
[9] Hu S Y, Wu X, Liang E. ApJS, 2021, 257(2): 40
[10] Wisdom J, Holman M. AJ, 1991, 102: 1528
[11] Deng C, Wu X, Liang E. MNRAS, 2020, 496(3): 2946
[12] Sun W, Wang Y, Liu F Y, et al. European Physical Journal C, 2021, 81: 785
[13] Sun X, Wu X, Wang Y, et al. Universe, 2021, 7: 410
[14] Feng K, Qin M. Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010: 277
[15] Wang Y, Sun W, Liu F Y, et al. ApJ, 2021, 907: 66
[16] Wang Y, Sun W, Liu F Y, et al. ApJ, 2021, 909: 22
[17] Wang Y, Sun W, Liu F Y, et al. ApJS, 2021, 254: 8
[18] Wu X, Wang Y, Sun W, et al. ApJ, 2021, 914: 63
[19] Zhang H X, Zhou N Y, Liu W F, et al. Universe, 2021, 7: 488
[20] Zhou N Y, Zhang H X, Liu W F, et al. ApJ, 2022, in press; arXiv: 2201. 02922
[21] Zhong S Y, Wu X. PHRD, 2010, 81(10): 4037
[22] Mei L J, Wu X, Liu F Y. European Physical Journal C, 2013, 73(5): 2413
[23] Mei L J, Ju M, Wu X, et al. MNRAS, 2013, 435(3): 2246
[24] Liu L, Wu X, Huang G Q, et al. MNRAS, 2016, 459(2): 1968
[25] Luo J, Wu X. European Physical Journal Plus, 2017, 132(11): 485
[26] Li D, Wu X. MNRAS, 2017, 469(3): 3031
[27] 廖新浩, 刘林. 天文学进展, 1996, 14(1): 9
[28] 孙浪, 刘福窑, 王颖, 等. 天文学进展, 2021, 39(2): 23

[29] Forest E, Ruth R D. Phys D, 1990, 43(1): 105
[30] Candy J, Rozmus W J. Comput Phys, 1991, 92(1): 230
[31] Yoshida H. Astrophys Lett, 1990, 150(5-7): 262
[32] Mclachlan R I, Atela P. Nonlinearity 1999, 5(2): 541
[33] Omelyan I, Mryglod I, Folk R. Comput Phys Commun, 2002, 146(2): 188
[34] Chin S A. Phys Lett A, 1997, 226(6): 344
[35] Chin S A, Chen C R J. Chem Phys, 2001, 114(17): 7338
[36] Chin S A, Chen C R. Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy, 2005, 91(3-4): 301
[37] Omelyan I P, Mryglod I M, Folk R. Phys Rev E: Stat Nonlinear Soft Matter Phys, 2002, 66(2): 6701
[38] Omelyan I P, Mryglod I M, Folk R. Comput Phys Commun, 2003, 151(3): 272
[39] Xu J, Wu X. A&A, 2010, 10(2): 173
[40] 李荣, 伍歆. 物理学报, 2010, 59(10): 7135
[41] Li R, Wu X. Chinese Physics Letters, 2011, 28(7): 5
[42] Li R, Wu X. European Physical Journal Plus, 2011, 126(8): 1
[43] Sun W, Wu X, Huang G Q. Res Astron Astrophys, 2011, 11(3): 353
[44] 陈云龙, 伍歆. 物理学报, 2013, 62(14): 33
[45] Zhang L N, Wu X, Liang E. Mathematics, 2021, 9: 2718
[46] Chin S A. Phys Rev E: Stat Nonlinear Soft Matter Phys, 2007, 75(3): 6701
[47] Li R, Wu X. Sci China: Phys Mech Astron, 2010, 53(9): 1600
[48] Chin S A, Kidwell D W. Phys Rev E, 2000, 62(6): 8746
[49] Chin S A. Phys Rev E, 2004, 69(4): 6118
[50] Chin S A. Phys Rev E: Stat, Nonlinear Soft Matter Phys, 2006, 73(2): 6705
[51] 廖新浩, 刘林. 计算物理, 1995, 12(1): 102
[52] Holman M, Wiegert P. Astron J, 1998, 117(1): 621
[53] Mikkola S. Celestial Mechanic and Dynamic Astronomy, 1997, 67: 145
[54] 伍歆, 黄天衣. 天文学进展, 2005, 23: 318
[55] Wu X, Huang T Y. Phys Lett A, 2003, 313(1-2): 77
[56] Tancredi G, Sánchez A, Roig F. Astron J, 2001, 121(2): 1171
[57] Wu X, Xie Y. Phys Rev D, 2008, 77(10): 3012
[58] Wang Y, Wu X. Chin Phys B, 2012, 21(05): 4
[59] 王玉诏, 伍歆, 钟双英. 物理学报, 2012, 61(16): 10
[60] Wu X, Huang T Y, Zhang H. Phys Rev D: Part Fields, 2006, 74(8): 3001

Application of Force Gradient Symplectic Algorithm to External-restricted Three-body Problem with two Stars and an Extroplanet

WANG Ya-ru[1,2], LIU Fu-yao[1], WANG Ying[1,2], SUN Wei[1,2], ZHENG Jing-jing[1,2], XIAO Qian-qian[1,2]

(1. Shanghai University of Engineering Science, School of Mathematics, Physics and Statistics, Shanghai 201620, China ; 2. Shanghai University of Engineering Science Center of Applications and Research of Computational Physics, Shanghai 201620, China)

Abstract: The three-body system is not integrable, and can be chaotic in some circumstances. The description of chaotic motion depends on reliable numerical methods and chaos indicators. Symplectic algorithms can keep Hamiltonian phase flow and overcome the problem that traditional algorithms have secular drifts in energy errors. Because of this, they are the best integrators for studying the long-term dynamic evolution of the Hamiltonian system. The Hamiltonian of an elliptic external-restricted three-body problem with two stars and an extroplanet in the rotating centroid coordinate system contains the cross term of coordinates and momentum, and explicitly depends on time variable. The Hamiltonian system is no longer conserved, and the explicit force gradient symplectic algorithm cannot be directly applied. Extending the phase space to transform the non-conservative Hamiltonian system into a conservative Hamiltonian system, we can establish force gradient symplectic algorithms. The standard fourth-order symplectic algorithm, the optimized fourth-order symplectic algorithm, the optimized fourth-order force gradient symplectic algorithm and the optimized fourth-order force gradient symplectic algorithm are independently used to solve the elliptic external-restricted three-body problem. It is found that the accuracy of the force gradient symplectic algorithm constructed in this paper is better than that of the non-force gradient symplectic algorithm, and the accuracy of the optimized force gradient symplectic algorithm is better than that of the symplectic algorithms without optimization. The fourth-order optimized force gradient algorithm and fast Lyapunov index are used to scan the phase space of the elliptic external-restricted three-body system, and the effects of each parameter on the planetary orbit dynamic stability are obtained.

Key words: force gradient symplectic algorithm; elliptic external-restricted three-body problem; extroplanet; chaos; dynamical stability